2014. 03. 24 Gráfelmélet előadás jegyzetelő: Németh Klaudia
előadó: Hajnal Péter

A gráfelmélet a matematika egyik ága, ezen belül is a kombinatorika fontos része. Gyökerei egészen Eulerig nyúlnak vissza. A gráf, grafikon, grafikus szavak szoros kapcsolatban állnak a vizualitással.
A matematikának ezen ága mindennapjaink fontos elemeivel kapcsolatos:

pl: világháló ~ internet, a molekulák kapcsolata, élővilág vagy akár a gazdasági kapcsolatok stb.

A gráfoknak több típusa van: Az egyszerű gráfokkal kezdünk:

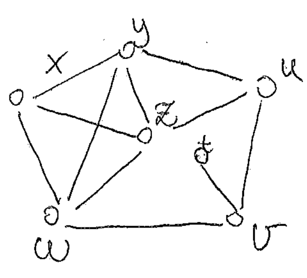
A G egyszerű gráf, amely V véges csúcshalmaz. A V halmaz elemeit csúcsoknak nevezzük. És bizonyos csúcspárok V halmaza, E ~~elemeit~~ az élek halmaza. Jelölésük az angol terminológiából ered:

csúcs ≡ Vertex → V
él ≡ Edge → E

$$E \subseteq \binom{V}{2} \overset{\text{jel.}}{=} \{\{x,y\} \subseteq V,\ x \neq y\}$$

Ez az összes lehetséges él V-n egy G egyszerű gráfban.

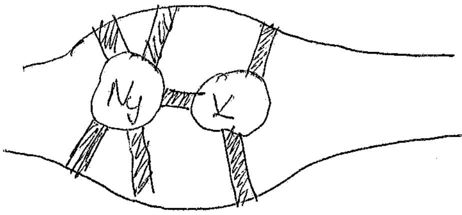
A gráfok lerajzolhatók: A csúcsok karikákkal az éleket adott csúcspárok összekötő vonallal szemléltethetők.



Ezen a gráfon is jól látható, hogy z, w, y-hoz sok él kapcsolódik, t-hez csupán egy, és z és v között kapcsolat sem áll fent.

Ha G egy osztályon belüli kapcsolat, akkor egy pillanat alatt áttekinthető ki a ~~középpont~~ központi személyiség, ki az aki visszahúzódó, kevés barátja van.

A gráfelmélet ~~fogat~~ alapfogalma a gráf a königsbergi hidak problémájából eredeztethető.



csúcsok: szárazföldi egységek (ÉK-DNy)
élek: hidak, melyek két szárazföldi pontot kötnek össze.

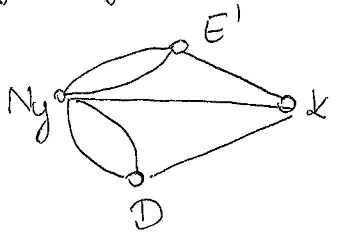
De ez nem egyszerű gráf - Az élek (hidak) nem azonosíthatók csúcspárokkal,

Tehát a G gráf felépítése:

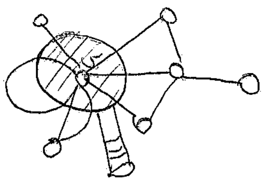
V: véges csúcshalmaz
E: véges élhalmaz
I: illeszkedési reláció V és E között ($\subseteq V \times E$)
$v \in V$, $e \in E$, $v \, I \, e$
v csúcs illeszkedik e-re ~ v csúcs e él végpontja

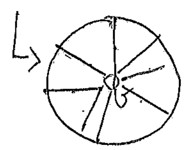
V, E, I: gráfot alkot, ha minden élnek két végpontja van, de fontos, hogy ez a két pont egybe is eshet.

A königsbergi hidak gráfja:



Nézzünk egy gráfot ahol $v \in V(G)$





Ha a v csúcsra egy nagyítóval ráközelítünk akkor meghatározhatjuk a v csúcs fokszámát.
A v csúcs fokszáma egyenlő a „napocska" ágaival.
Tehát egy hurokél a fokszámhoz 2-t ad hozzá

Def: $d(v) = 2\,|\{e : \text{v-re illeszkedő hurok}\}| + 1\,|\{e : \text{v-re nem ill. hurokél}\}|$

1. Tétel

G gráf: $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$

Biz.: Rajzoljunk le egy G gráfot és minden élgörbe két végpontjához írjunk egy 1-est. Hány 1-est írtunk le? Érzékelhető, hogy minden élhez 2 db 1-es írtunk le. Tehát egy válasz $2|E|$. Egy másik választ kapunk ha a csúcsok környezetében található 1-eseket csoportosítjuk.

↓

v csúcs körül $d(v)$ db 1-es került, ezeket kell összeadni

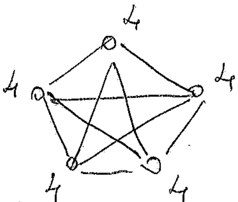
↓

$\sum d(v)$. A két válasznak meg kell egyezni, ami a tétel állítása.

Pl. K_n teljes gráf V-n (ez egy egyszerű gráf)

Tetszőleges 2 különböző pont 1 élt határoz meg.

pl K_5



5 csúcs $= |V| = 5$

10 él $= |E| = 10$

Ez egy 4 reguláris gráf.

↳ Egy gráf G reguláris ≡ minden csúcsának ugyanaz a fokszáma

k reguláris ≡ minden csúcsnak k a foka.

általában: $K_n \to |V| = n$

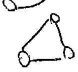
$|E| = \binom{n}{2}$

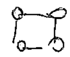
fokok $(n-1)$ reguláris.

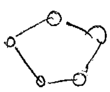
A C_n gráf egy n pontú körgráf

C_1: 

C_2: 

C_3: 

C_4 = 

C_5: 

→ C_n = $|V| = n$

$|E| = n$

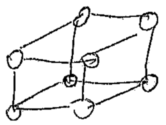
2 reguláris

Megjegyzés: C_1, C_2: nem egyszerű gráf

$C_3, C_4, \ldots, C_n$: egyszerű gráf

A kockának is van gráfja (csúcs, él a 3 dimenziós geometriában, poliédereknél ismert fogalom)

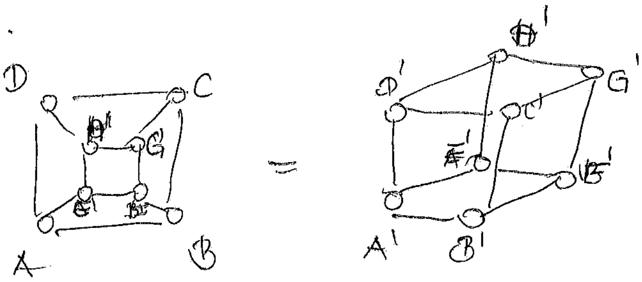
Vegyünk egy kockát:



$|V| = 8$
$|E| = 12$
fok: 3 (egybevágósági transzformáció miatt)

Amikor gráfot rajzolunk hatalmas szabadságunk van.

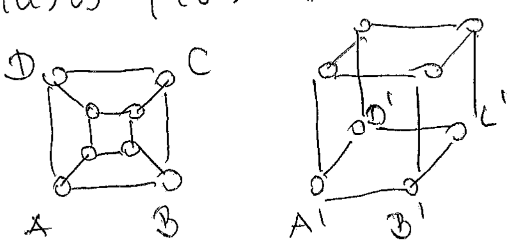
pl.



Def.: G és H gráf, melyek egyszerű gráfok izomorfak ha: $\exists\ \varphi: V(H) \to V(G)$ bijekció úgy, hogy ha $u, v \in V(H)$ szomszédos pontok (u, v összekötött)

$\Updownarrow$ $\{u,v\} \in E$

$\varphi(u)$ és $\varphi(v)$ szomszédos



Az egyik gráf csúcsainak neve "átnevezhető" ($A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$, $D \to D'$) úgy, hogy a másik gráfot kapjuk.